Enseñar Matemáticas en la Era Digital: Análisis Matemático Aplicado

Teaching Mathematics in the Digital Era: Applied Mathematical Analysis

Damián-Emilio Gibaja-Romero[*]

Resumen

En México, diferentes evaluaciones señalan la existencia de un rezago educativo en torno al entendimiento de las matemáticas. Aunque una parte se explica por la pandemia del COVID-19, investigaciones recientes señalan la necesidad de actualizar los procesos de enseñanza-aprendizaje pues estos se han enfocado en desarrollar habilidades de cálculo, que se perciben sin utilidad. Por consiguiente, se descuida el desarrollo de otras habilidades que contribuyen a relacionar la abstracción con la resolución de problemas cotidianos. Por ello, el presente artículo conceptualiza al *Análisis Matemático Aplicado* como un marco bajo el cual desarrollar diferentes habilidades asociadas al, y no sólo los procesos de cálculo. La noción de Análisis Matemático Aplicado busca relacionar variables asociadas a problemas cotidianos con conceptos matemáticos formales; es decir, servir como guía para crear actividades que permitan a los estudiantes comunicar, interpretar, identificar supuestos, hacer cálculos, representar y analizar problemas mediante el entendimiento de los objetos matemáticos. Al buscar implementar el concepto matemático con su aplicación, ello también permite identificar las herramientas digitales que pueden facilitar la comprensión ya sea por su capacidad gráfica o de cálculo.

Palabras Clave: Matemáticas Aplicadas, Enseñanza de la Matemática, Análisis Matemático Aplicado.

Abstract

In Mexico, various assessments point to an educational gap in understanding mathematics. Although part of this is explained by the COVID-19 pandemic, recent research points to the need to update teaching-learning processes, as these have focused on developing calculus skills, which are perceived as useless. Consequently, the development of other skills that contribute to linking abstraction with everyday problem-solving is neglected. Therefore, this article conceptualizes Applied Mathematical Analysis as a framework for developing different skills associated with, and not just with, calculus processes. The notion of Applied Mathematical Analysis seeks to relate variables, that describe common problems, with formal mathematical concepts; that is, to serve as a guide for creating activities that allow students to communicate, interpret, identify assumptions, perform calculations, represent, and analyze problems through an understanding of mathematical objects. Seeking to implement mathematical concepts with their applications also allows us to identify digital tools that can facilitate understanding, either through their graphical or computational capabilities.

Keywords: Applied Mathematics, Teaching Mathematics, Applied Mathematical Analysis.

[*] Director Académico del Área de Matemáticas, UPAEP-University
Email. damianemilio.gibaja@upaep.mx

1 Introducción

Uno de los principales desafíos que enfrenta el sector educativo mexicano es el desarrollo del pensamiento matemático, tal como lo señalan los resultados obtenidos en pruebas internacionales que miden conocimiento y razonamiento matemático. En la prueba PISA, realizada en el año 2023, los estudiantes mexicanos obtuvieron 395 puntos, desempeño que colocó a México en el antepenúltimo lugar cuando se le compara con países de la Organización para la Cooperación y Desarrollo Económico (OCDE). Además, México está 71 puntos por debajo del promedio de los países de la OCDE, lo cual se estima equivalente a un rezago educativo de alrededor de tres años (Jakubowski et al., 2024). Estos resultados reafirman la tendencia negativa que se ha observado desde el año 2018 en el desempeño de los estudiantes mexicanos en matemáticas (Torres Ramírez, 2024).

Entre las razones que explican los resultados anteriores destaca lo poco que se ha hecho para replantear la enseñanza de las matemáticas en el sistema mexicano pues este prioriza la memorización de procesos de cálculo. Por consiguiente, los estudiantes enfrentan dificultades para entender y usar conceptos matemáticos en la resolución de problemas cotidianos (Palafox Pérez de Salazar, 2023). Aunado a lo anterior, los rápidos avances tecnológicos han incrementado la complejidad y sofisticación de la sociedad actual, por lo cual es necesario pensar en una nueva enseñanza de las matemáticas que lidie con los entornos digitales (Simó et al., 2020).

Aunque no hay consenso sobre cuál es la metodología más apropiada para cambiar la enseñanza de las matemáticas, es claro que su replanteamiento debe relacionar conceptos y metodologías matemáticas con aplicaciones a situaciones específicas. En otras palabras, que los estudiantes sean capaces de usar herramientas abstractas para solucionar problemas cercanos (Tabach & Trgalová, 2020). Algunas metodologías que logran lo anterior son el aprendizaje basado en problemas y el método singapur. Sin embargo, su énfasis en el diseño, presentación y seguimiento de las actividades puede dejar de lado la formalidad con la que deben tratarse los objetos matemáticos (Weigand et al., 2024; Riego-Gaona & Bocanegra-Fuentes, 2024).

El presente artículo plantea al Análisis Matemático Aplicado (AMA) como una guía teórica para guiar la enseñanza de las matemáticas en la generación de distintas habilidades mediante el respaldo de herramientas tecnológicas y su aplicación en problemas cotidianos sin descuidar la formalidad de los conceptos, necesaria para generar resultados válidos. Esta reflexión se hace a partir del trabajo que se ha desarrollado en el Área de Matemáticas de la UPAEP. Por un lado, los procesos de acreditación han generado reflexión sobre los procesos de evaluación. Por otra parte, la introducción de nuevas tecnologías de apoyo a la enseñanza ha hecho reflexionar sobre el diseño de estrategias de aprendizaje.

Como se mencionó anteriormente, la enseñanza tradicional de las matemáticas se enfoca en desarrollar habilidades de cálculo. Aunque la enseñanza debe cambiar, esto no significa abandonar del todo el desarrollo del cálculo. Es importante resaltar que los procesos de cálculo nos ayudan a entender instrucciones específicas, seguirlas y memorizar conceptos básicos. Sin embargo, la enseñanza de las matemáticas debe balancear el desarrollo de habilidades de cálculo con la capacidad para identificar patrones, abstraer problemas, interpretar resultados y deducir ideas; es decir, lograr un entendimiento pleno de los conceptos matemáticos (Salett Biembengut & Hein, 2004; Alvis Puentes et al., 2022).

La literatura también sugiere a la modelación matemática como un punto de partida hacia una enseñanza de las matemáticas que no sólo desarrolle habilidades de cálculo. Sin embargo, establecer modelos matemáticos suele enfocarse en la representación de un problema en específico, lo cual genera incentivos a tratar de resolver cualquier problema con algún modelo ya conocido, dejando de lado la capacidad para identificar y justificar la selección de herramientas matemáticas más apropiadas (Solar et al., 2023). Para resolver estos problemas, es posible implementar una enseñanza basada en la argumentación matemática. Sin embargo, ésta descuida los procesos de cálculo y análisis (Páez et al., 2020). Así, la principal aportación de este artículo es mostrar que la noción de análisis matemático aplicado subsana los problemas de la modelación y argumentación matemática mediante la incorporación de las diferentes habilidades asociadas al pensamiento cuantitativo por medio de la relación entre aplicaciones y conceptos matemáticos formales.

La integración de herramientas digitales es otro aspecto a considerar en el replanteamiento de la enseñanza de las matemáticas. En la actualidad, el Internet ha facilitado el acceso a software libre que permite resolver problemas de cálculo, graficar e implementar métodos matemáticos para analizar un problema. Por ello, existe la tentación de disminuir el tiempo dedicado a las matemáticas en los planes de estudio. Sin embargo, los resultados negativos asociados al uso masivo de herramientas digitales durante la pandemia del COVID-19 nos indican que la enseñanza matemática no puede sustituirse total o parcialmente por herramientas digitales (Hammerstein et al., 2021). Ello se debe a que el software matemático requiere conocimientos básicos para usarlo correctamente. Por ello, las herramientas digitales deben integrarse como una herramienta de apoyo al entendimiento de conceptos matemáticos tradicionales o más actuales (Galimullina et al., 2019). En este sentido, el AMA proporciona bases matemáticas para un uso correcto del software matemático, pero también ayuda a entender e identificar aquellos problemas donde el software puede desempeñar un mejor papel en la enseñanza de las matemáticas. Por ejemplo, cuando la resolución de un problema es exhaustiva en cálculos, el entendimiento formal de los conceptos matemáticos sugiere usar software para realizar cálculos exhaustivos y enfocarnos en el entendimiento del objeto matemático utilizado.

A manera de un ensayo argumentativo, la organización del artículo es la siguiente. La segunda sección presenta una conceptualización de análisis matemático aplicado. Posteriormente, dicha conceptualización se relaciona con las diferentes habilidades que involucran al pensamiento matemático y que deben desarrollarse en una nueva enseñanza de las matemáticas. La tercera sección se enfoca en la relación del AMA con las tecnologías digitales. Finalmente, se presentan las conclusiones.

2 ¿Existe el Análisis Matemático Aplicado?

La pregunta que titula esta sección es pertinente pues el término *Análisis Matemático Aplicado* no es común incluso en la comunidad matemática. Dada la separación de las matemáticas en puras y aplicadas, a finales del siglo XIX (Poveda Ramos, 1986), lo usual es encontrar libros, revistas científicas y cursos relacionados con *Análisis Matemático*. Este último es la rama de la matemática pura dedicada a estudiar las propiedades de los sistemas numéricos a partir de la construcción de diferentes relaciones por medio de funciones. Por ello, la presente sección primero ahonda en la conceptualización tradicional del análisis matemático y muestra algunas de sus aplicaciones. Posteriormente, se presenta la idea de Análisis Matemático Aplicado considerando como punto de partida la experiencia internacional.

2.1 Análisis Matemático y Aplicaciones

En un sentido literal, análisis matemático significa examinar un problema por medio de conceptos y métodos provenientes de las matemáticas. Por ejemplo, podemos estudiar el crecimiento poblacional por medio de una ecuación diferencial que describe los cambios de la población a través del tiempo. También, decimos que analizamos matemáticamente las tendencias en precios y temperatura cuando usamos métodos estadísticos. Sin embargo, su significado cambia en un contexto más académico. De manera simple, partiremos por considerar al Análisis Matemático (AM) como la rama de las matemáticas que estudia las relaciones entre variables por medio de funciones y límites (Wikipedia, 2020).

Al ser las funciones y los límites conceptos básicos para el AM, este se origina con la formalización que hicieron Newton y Leibnitz del *Cálculo Diferencial* e *Integral* en el siglo XVII. Específicamente, los conceptos de función continua, derivada e integral son el objeto de estudio básico del Análisis Matemático. Dichos conceptos relacionan variables al estudiar su comportamiento en las cercanías de un valor, los cambios marginales correspondientes y la acumulación arbitraria de magnitudes, respectivamente.

Es importante mencionar que los conceptos de límite, derivada e integral se definen, en primera instancia, a partir de las propiedades de los números reales y las funciones que entre ellos se pueden construir (Fraser, 1989). Sin embargo, es posible abstraer dichos conceptos en espacios con objetos matemáticos más complejos mediante la identificación de propiedades similares a las de los números reales. Para ilustrar este punto, es importante partir del concepto de límite el cual se refiere al comportamiento de la variable independiente cuando la variable dependiente se aproxima a dicho valor. Entonces, analizar el límite de una función parte de las ideas de *cercanía* y *distancia* (Millman & Grattan-Guinness, 1972).

Notemos que los conceptos de cercanía y distancia se relacionan entre sí. Un objeto está cerca de nosotros sí la distancia que nos separa es pequeña. También, la distancia entre nosotros y un objeto hace referencia a que tan cercano está el objeto de nosotros. A pesar de su similitud, el

AM trata de entender ambos conceptos con mayor profundidad. De hecho, el AM diferencia entre ambos conceptos cuando los define.

Formalmente, la distancia es una función que asigna un número real positivo a cualquier par de objetos de un conjunto y que, además, satisface tres propiedades. La primera es la propiedad de *simetría*, es decir, la distancia entre dos objetos es la misma si se mide del primer objeto al segundo o al revés. La segunda indica que la distancia es cero sí y sólo si corresponde a la distancia de un objeto consigo mismo. Finalmente, la distancia debe satisfacer la *desigualdad de triángulo*, es decir, la distancia entre dos objetos es menor a la suma de las distancias entre dichos objetos y un objeto intermedio (Witten et al., 2017).

Ciertamente, la definición anterior nos ayuda a formalizar nuestra primera noción de cercanía. Es decir, dos objetos son cercanos cuando la distancia entre ellos es menor a un valor arbitrariamente pequeño. Sin embargo, no es necesario tener una función de distancia para establecer la cercanía entre dos objetos. Por ejemplo, podemos decir que dos objetos son cercanos, o están en la misma *vecindad*, cuando pertenecen al mismo conjunto (Bredon, 2013).

En general, podemos hacer AM en cualquier espacio donde podamos establecer una función de distancia. Sin embargo, dicha función no es necesaria para establecer la cercanía entre dos objetos. También, dada su conceptualización, podemos decir que *distancia* es un concepto más demandante que la idea de *cercanía*. Así, el AM es lo suficientemente flexible para analizar diferentes problemas a partir de la relación de sus variables.

En las ingenierías, por ejemplo, es posible usar el enfoque del AM para garantizar el funcionamiento eficiente de un circuito eléctrico, optimizar procesos de producción y analizar el fluido de una sustancia. La resolución de estos problemas parte del Cálculo. Particularmente, usamos la derivada para estudiar el cambio de una variable dependiente con respecto a cambios de la variable independiente. Sí la razón de cambio se anula, existe una situación crítica en la relación entre las variables; esto implica la existencia de un máximo o mínimo local pues ya no es posible que la relación disminuya o se incremente en dicho punto (Nortvedt & Siqveland, 2018).

Es importante resaltar que las aplicaciones del AM no se limiten a las ingenierías. Las ciencias sociales, humanidades y ciencias médicas también utilizan los conceptos del AM para resolver problemáticas asociadas a sus objetos de estudio. Por ejemplo, la descomposición de señales en ondas (por medio de series y transformaciones de Fourier) se usa para estudiar música (Jessop, 2017), pero también se emplea en medicina para detectar enfermedades o lesiones durante el embarazo por medio de ultrasonidos más sofisticados y completos (Cincotti et al., 2001). Por su parte, la economía y las finanzas utilizan los diferentes conceptos de *medida* para caracterizar las trayectorias de variables económicas y optimizar los rendimientos o costos de los agentes económicos. Interesantemente, el AM permite generalizar ideas económicas a mercados (espacios matemáticos) donde no es posible utilizar un mecanismo de interacción basado en la formación de precios y el intercambio de dinero (Chen, 2016). Finalmente, la transmisión de una enfermedad como el COVID-19 puede estudiarse por medio de los cambios que experimentan diferentes poblaciones y cómo se relacionan entre ellas. De manera clásica, la transmisión de enfermedades se estudia con el modelo SIR, el cual estudia la interacción entre personas susceptibles a enfermarse, aquellas que se encuentran infectadas y las personas ya recuperadas. Dicho modelo establece el comportamiento de cada una de las poblaciones a través del tiempo (Adiga et al., 2020).

2.2 La construcción del Análisis Matemático Aplicado

Antes de conceptualizar el Análisis Matemático Aplicado, es importante mencionar que actualmente solemos distinguir entre matemáticas aplicadas y puras aplicadas. Las Matemáticas Aplicadas establecen conceptos y métodos que se usan para resolver problemas asociados a procesos sociales, biológicos, humanos o productivos. Por ejemplo, la Teoría de Juegos establece un marco matemático con el cual analizar situaciones de conflicto; es decir, interacciones entre agentes cuyas decisiones los impactan mutuamente. La negociación de acuerdos comerciales, la competencia entre empresas o el diseño de contratos son problemáticas analizadas por la Teoría de Juegos (Yevsyeyeva & Skafa, 2016). Por su parte, la Criptografía genera mecanismos para ocultar mensajes que se intercambian por medio de alguna plataforma. Entonces, la criptografía diseña algoritmos de codificación con los cuales la información que se trasmite sólo puede ser descifrada por quienes tienen la llave de decodificación (Palacios & Delgado, 2006).

Por su parte, las Matemáticas Puras estudian conceptos matemáticos abstractos. Respecto al AM, su objeto de estudio no está asociado a una problemática cotidiana como son los conflictos o el intercambio de información. Específicamente, el AM estudia funciones y límites, cuya naturaleza es abstracta por la generalidad de sus definiciones. Por ello, es común asociar al AM con las matemáticas puras. Sin embargo, es importante recordar que las bases del AM se relacionan con el cálculo diferencial e integral, que en sus inicios no fueron clasificados como matemáticas puras.

El origen del cálculo ocurrió en una época donde no se distinguía entre matemática pura y aplicada. Incluso, los conceptos de límite, derivada e integral están estrechamente relacionados con problemas físicos cuya resolución sirve para mejorar procesos de construcción o transporte (Farfán Núñez et al., 2023). Aunado a lo anterior, la sección previa muestra que las teorías del AM han roto la barrera de lo abstracto para ser aplicados en problemas concretos que son de interés en nuestra sociedad. Esto nos sirve de base para conceptualizar el *Análisis Matemático Aplicado*.

Retomando el surgimiento del Cálculo, este estuvo asociado a analizar fenómenos físicos. De entre todos ellos, el problema de la braquistócrona fue crucial para su desarrollo pues se planteó durante la época en la que Newton y Leibnitz recién habían formalizado el Cálculo Diferencial e Integral (Milsom, 2021). Su estudio mostró el potencial del Cálculo y también sentó las bases del Cálculo de Variaciones. Dicho problema busca una curva entre dos puntos de tal forma que se llegue del primer al último punto en el menor tiempo posible. Su solución, la braquistócrona, es la curva de descenso más rápido; es decir, aquella que minimiza la relación entre tiempo y distancia recorrida, variables que se presentan en problemas cotidianos. Por ejemplo, las compras en línea buscan cumplir con los tiempos de entrega, mientras que las distancias de recorrido influyen en el costo de los medios de transporte. Así, la resolución del problema de la braquistócrona requiere entender la relación entre las variables tiempo y distancia. De esta forma, el problema de la braquistócrona se puede entender como un problema de aplicación del AM. Por ello, una primera definición sobre Análisis Matemático Aplicado (AMA) sería el estudio de las relaciones entre variables asociadas a problemas cotidianos.

La definición anterior de AMA nos permite conectar el AM con otras disciplinas. De hecho, aunque no es algo generalizado, algunas universidades han utilizada la idea del AMA para nombrar proyectos de investigación, cuerpos académicos o generar cursos. Como línea de investigación, Wanduku et al. (2024) consideran que el AMA engloba diferentes disciplinas

(Ecuaciones Diferenciales, Computación, Probabilidad, Estadística Matemática, Combinatoria, entre otras). Además, consideran que su objetivo es resolver problemas interdisciplinarios por medio de métodos basados en las teorías y aplicaciones del AM.

Existen también algunos cuerpos académicos de investigación asociadas al AMA. En la University of Pittsburgh, el cuerpo académico de Análisis Aplicado se enfoca en estudiar sistemas dinámicos no lineales. Estos últimos con aplicaciones en problemas de flujo y aplicaciones concretas en finanzas (Department of Mathematics UP, 2024). Por su parte, el Illinois Tech prioriza en el AMA la relación entre la física, química y ciencia de materiales con herramientas matemáticas asociadas a las ecuaciones diferenciales parciales y los métodos numéricos (Illinois Tech, 2023).

Las menciones del AMA no sólo están presentes en actividades y proyectos relacionados con investigación. También es posible encontrar planes de estudio que usan el AMA como base. La Technical University of Denkmark propone una especialización en AMA considerando fundamentos teóricos y prácticos de las matemáticas aplicadas. La intención de esta especialización es estudiar problemas de la ingeniería por medio de la Geometría Diferencial, Análisis Funcional, Sistemas Dinámicos y Ecuaciones Diferenciales. Es decir, se pretende identificar aplicaciones inmediatas en las ingenierías (Technical University of Denkmark, 2024). Por su parte, la University of Birmingham ofrece un curso de AMA basado en el uso de ecuaciones diferenciales, análisis complejo, álgebra lineal, así como análisis real multivariable y vectorial. Así, el curso se enfoca en poder estudiar perturbaciones en escenarios dinámicos (University of Birmingham, 2021).

Lo anterior nos permite tener una conceptualización más amplia del AMA. Particularmente, consideramos que el AMA estudia problemas de la vida cotidiana mediante la identificación y formalización de variables esenciales para construir procesos de solución basados en conceptos matemáticos.

3 Análisis Matemático Aplicado, Razonamiento Matemático y Herramientas Digitales

Retomando el replanteamiento de la enseñanza matemática, es importante recordar que ésta debe balancear el desarrollo de diferentes habilidades, y al mismo tiempo considerar la existencia de herramientas digitales. Es decir, se debe romper el paradigma tradicional enfocado a la repetición de algoritmos pues ello desincentiva el interés por las matemáticas. Además, existen herramientas digitales más eficientes en los procesos de cálculo (Salett Biembengut & Hein, 2004; Tabach & Trgalová, 2020; Weigand et al., 2024). Además, el pensamiento matemático involucra diferentes habilidades cuyo desarrollo puede ser impulsado por los fundamentos del AMA.

Es importante resaltar que no existe una definición única de pensamiento matemático. Para algunos autores, éste es la capacidad de resolver problemas mediante procesos lógicos y la identificación de patrones. Así, el pensamiento matemático se asocia a establecer órdenes y estructuras (Schoenfeld, 2016). Sin embargo, la noción anterior se ha actualizado y complementado. En años recientes, algunos autores consideran que el pensamiento matemático se puede descomponer en cinco dimensiones: análisis, sistematización, inferencia, abstracción e interpretación. Por ello, el aprendizaje matemático no sólo organiza y estructura, sino que también provee la capacidad para entender integralmente el entorno que nos rodea (Shiguay, Maney and De, 2022).

Las diferentes habilidades, dimensiones o características del pensamiento matemático incrementan la complejidad de enseñar matemáticas pues la memorización de ciertos conceptos debe permanecer aun cuando otras habilidades se han desarrollado. Otro aspecto a considerar es la dificultad para operar el desarrollo de algunas dimensiones, como la abstracción y la inferencia. En este sentido, la evaluación de los procesos de enseñanza es un aspecto crucial en la educación actual (Bakker, Cai and Zenger, 2021). Por ello tendencias pedagógicas recientes han promovido acercarse al pensamiento matemático desde el razonamiento cuantitativo. La diferencia es que el primero suele asociarse al uso de los conceptos matemáticos una vez identificado el problema, mientras que el segundo promueve la selección y argumentación en la interacción con el problema; es decir, el razonamiento cuantitativo promueve un acercamiento crítico al problema (Tallman and Frank, 2018; Simic-Muller, 2019). Por lo anterior, partimos del razonamiento cuantitativo para argumentar por qué el AMA puede promover una enseñanza balanceada de las matemáticas.

Primero, es importante entender las diferentes habilidades que el razonamiento cuantitativo busca desarrollar. Por ello, consideramos la descomposición que la Association of American Colleges and Universities (2020) hace del razonamiento cuantitativo en las siguientes seis dimensiones:

a. Interpretación. Uso de objetos matemáticos para explicar resultados y procedimientos.
b. Representación. Capacidad para plasmar información por medio de objetos matemáticos.
c. Cálculo. Desarrollo de operaciones matemáticas.
d. Aplicación/Análisis. Generar conclusiones a partir de la información proporcionada por conceptos matemáticos.
e. Supuestos. Identificación de los elementos que limitan y caracterizan el uso de ciertas herramientas matemáticas.
f. Comunicación. Respaldo de los resultados obtenidos a partir de las herramientas matemáticas utilizadas.

Segundo, en la sección previa señalamos que el AMA se percibe como un punto donde convergen herramientas de diferentes disciplinas matemáticas. Por ejemplo, las ecuaciones diferenciales se emplean para analizar fenómenos dinámicos, mientras que la probabilidad y la estadística se usan para realizar simulaciones cuando el cálculo de las soluciones analíticas se vuelve computacionalmente complejo. También, vectores y matrices proporcionan estructura y relacionan diferentes espacios (Illinois Tech, 2023; Technical University of Denmark, 2024; University of Bermingham, 2021).

Por lo anterior, el AMA promueve la *representación* de un problema aplicado al identificar sus variables y la forma en que se relacionan. Es decir, el uso del lenguaje matemático para expresar una situación problemática. Con lo anterior es posible identificar las herramientas de análisis (límites, ecuaciones, medidas, estadísticas, entre otras) que sean más convenientes. La implementación de las herramientas matemáticas requiere el seguimiento de algoritmos y procesos; es decir, el AMA no impide la realización del *cálculo*. Por el contrario, este se requiere para la resolución de un problema cuya complejidad puede motivar el uso de herramientas digitales para no perder de vista la solución buscada (Moon, 2023).

Por otra parte, la formalidad del Análisis Matemático hace que el AMA enfatice en la necesidad de entender los objetos matemáticos para su correcta aplicación. Ello se puede observar con la relación entre cercanía y distancia que, aunque similares, su definición está asociada a diferentes propiedades de los espacios donde se usan. Es decir, el AMA promueva la *interpretación* de los objetos matemáticos a partir de su definición formal. Otro ejemplo de lo anterior es el entendimiento del límite de una función alrededor de un punto; la no existencia del límite puede significar una discontinuidad de salto, cuando los límites laterales existen pero son diferentes, o continuidad cuando los límites laterales son iguales y coinciden con la imagen del punto bajo la función. También, la no existencia de un límite se refiere a que la regla de correspondencia de la función no puede lidiar con dicho valor debido a alguna limitación conceptual (Cano and Flores-Medrano, 2020). Cualquiera de los casos anteriores provee información sobre la relación de las variables del problema para determinar sí la solución existe o no. Es decir, se desarrolla la capacidad de *aplicar/analizar* un problema por medio de objetos matemáticos.

Notemos que no todos los problemas se pueden resolver de la misma manera. Por ejemplo, la optimización depende de las características de la función objetivo (diferenciable o no) y de su dominio (abierto o cerrado). Así, entender los conceptos contribuyen a delimitar el problema señalando los *supuestos* que lo describen. Con ellos, la resolución del problema se puede basar en la búsqueda de puntos críticos por medio de la derivada o la comparación de los valores en la frontera del dominio (Swanagan, 2012).

Finalmente, notemos que la *comunicación* es algo intrínseco al Análisis Matemático pues, al ser una rama de las matemáticas puras, este busca que sus resultados y teorías se respalden por medio de una demostración. Ésta es una secuencia de argumentos lógicos basados en axiomas y resultados previos. Aunque el AMA se enfoca en el estudio de problemas aplicados a situaciones reales, sus resultados están respaldados por el uso de herramientas adecuadas a las características del problema.

La discusión anterior ilustra que la noción de AMA permite desarrollar diferentes competencias asociadas al razonamiento cuantitativo y con ello replantear la enseñanza de las matemáticas. Una de las grandes ventajas de esta perspectiva es que enlaza la parte formal de las matemáticas con problemas cercanos. En otras palabras, la discusión anterior nos permite indicar que el entendimiento de los conceptos, la selección de métodos para la resolución de problemas, su justificación y la explicación de los resultados van de la mano con el AMA. Esto promueve un balance en la enseñanza de las matemáticas sin descuidar el objeto matemático por el contexto del problema.

4 Incorporación de Nuevas Tecnologías

La sección anterior muestra que el Análisis Matemático Aplicado puede promover una enseñanza balanceada, relacionada con la alfabetización o razonamiento cuantitativo para una enseñanza integral de las matemáticas (Vacher, 2014; Shao et al., 2024). Esto extiende la conceptualización del AMA como una línea de enfoque que persigue el desarrollo de habilidades de cálculo, comunicación, interpretación, representación, aplicación e identificación de supuestos por medio de conceptos y herramientas matemáticas para la resolución de problemas que se presenten en la vida real.

A pesar de las características pertinentes del AMA como eje para el replanteamiento de la enseñanza de las matemáticas, es necesario discutir su adaptación a entornos digitales. Esto se debe a que el diseño de nuevas metodologías o estrategias de aprendizaje no debe ser ajeno al avance tecnológico. Por un lado, el software especializado puede apoyar a los estudiantes para simplificar el aprendizaje de los conceptos. Por otra parte, los entornos digitales también representan un reto de adopción y adaptación para profesores y alumnos (Muhazir and Retnawati, 2020).

Desde una perspectiva simplificada, al describir el surgimiento y evolución del AMA se observa su relación con herramientas digitales. Particularmente, como línea de investigación, el AMA conecta las Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales y la Teoría del Control con la Computación pues los problemas no lineales y multivariables son complejos de resolver de manera directa. Sin embargo, el AMA también busca construir mejores métodos computacionales a partir de conceptos matemáticas para resolver problemas complejos (Wanduku et al., 2024). Entonces, el AMA sugiere que las matemáticas y el software vayan de la mano en lugar de que uno sustituya al otro.

Lo último es de suma importancia en un escenario donde la masificación del Internet y el incremento en la capacidad de cómputo han permitido la proliferación de herramientas digitales que pueden resolver problemas complejos en un corto tiempo (Tabah y Trgalová, 2020). Al relacionarse con diferentes habilidades del razonamiento cuantitativo, el AMA enfatiza en la necesidad de entender matemáticamente el problema para una selección adecuada de los métodos de resolución, lo cual podemos extender a la selección del mejor software o método desarrollado por una herramienta digital. Esto resalta la importancia del planteamiento del problema y la interpretación de los resultados. Aunque el software especializado puede resolver problemas de optimización restringida, el software no construye la función objetivo y las restricciones. Por otra parte, el software se limita a dar los resultados del problema: los valores que satisfacen las restricciones y al mismo tiempo optimizan la función objetivo. Sin embargo, analizar, representar y comunicar el problema pueden complementar la información que proporciona el software. Particularmente, las restricciones permiten visualizar las características de la región solución y aquellos puntos que son factibles. Así, el entendimiento integral del problema puede contestar preguntas indirectas. Por ejemplo, las modificaciones que deben hacerse para alcanzar una solución no factible, o excluir alguna que sí lo sea. Nuevamente, el software apoya en la resolución de problemas, pero no proporciona información sí nosotros no lo hemos solicitado explícitamente.

Las últimas observaciones pueden ser debatidas a causa de la inteligencia artificial generativa (IAG), la cual tiene la capacidad de interactuar con el usuario. Dicha interacción retroalimenta a la inteligencia artificial, que complementa sus respuestas con la información que encuentra en Internet (Wardat et al., 2023). Aunque la IAG tiene un buen desempeño en preguntas básicas de matemáticas, enfrenta dificultades para analizar problemas más complejos. De hecho, al aprender de la información que tiene disponible, las respuestas proporcionadas por una IAG dependen de la veracidad de la información. Es decir, la IAG puede proporcionar respuestas incorrectas sí en ella se han trabajado conceptos matemáticos de manera incorrecta. Entonces, la integración de herramientas digitales a una nueva enseñanza de las matemáticas debe considerar su potencial y sus limitaciones.

Por lo anterior, la integración de herramientas digitales en la enseñanza de las matemáticas se puede originar en problemas que requieren un gran número de cálculos. En general, el software disminuye el tiempo de resolución, lo cual proporciona espacio para ampliar el análisis, ¿qué otras preguntas se pueden realizar en torno al problema? ¿hay variaciones, generalizaciones o instancias particulares que sean interesantes?

La visualización de resultados es otro de los beneficios que proporciona el software especializado ya que el análisis de un problema puede hacerse de forma interactiva y no unidireccional. Con ayuda de calculadora gráficas o software libre, es posible mostrar gráficamente a los estudiantes las implicaciones de cambiar los parámetros y las variables del problema (Pinargote-Zambrano, Lino-Calle and Vera-Almeida, 2024).

De igual forma, el software nos permite equivocarnos, identificar el error y corregir. Esto es de gran utilidad cuando los conceptos matemáticos no se han comprendido del todo. Por ejemplo, la multiplicación de matrices es una operación que no es conmutativa. Entonces, el uso de software puede mostrar errores cuando la manipulación de diferentes matrices no respeta los supuestos asociados a la multiplicación efectiva de matrices. Analizar y entender este tipo de errores fomentan el fortalecimiento de conceptos abstractos como la conmutatividad de las operaciones y la dimensión de un espacio vectorial. Por consiguiente, en la enseñanza de las matemáticas, el software especializado debe generar diálogo y un espíritu crítico en la obtención de resultados para poder discernir sobre su viabilidad (Haleem, Javaid y Singh, 2022).

5 Conclusiones

El presente artículo discute el replanteamiento de la enseñanza matemática a partir de la idea de Análisis Matemático Aplicado. Dado que este se enfoca en el estudio de la relación entre variables asociadas a problemas cotidianos, es posible balancear la teoría con la práctica de las matemáticas. Particularmente, al buscar un sentido aplicado de una disciplina tradicionalmente abstracta, el AMA permite el desarrollo de las habilidades que caracterizan a la alfabetización cuantitativa. Ello promueve una enseñanza matemática más balanceada, que no se enfoca sólo en los procesos de cálculo. Por el contrario, considera a la interpretación, comunicación, aplicación, representación y establecimiento como habilidades importantes a desarrollar al momento de profundizar en los conceptos matemáticos. En este sentido, el AMA permite complementar el diseño de escenarios de Aprendizaje Basado en Problemas para buscar un entendimiento integral de las matemáticas por medio de su aplicación a situaciones específicas.

También, es importante mencionar que el AMA no excluye la integración de herramientas digitales de apoyo. Por el contrario, un entendimiento profundo de los conceptos matemáticos permite determinar aquellas situaciones donde la complejidad del problema y su resolución directas son elevadas. Además, el conocimiento matemático también nos ayuda a identificar el uso incorrecto del software especializado. En este sentido, promover un AMA también busca el balance entre el uso de software y la intermediación del profesor. Dado el atraso en matemáticas que se vivió durante la pandemia del COVID-19, es claro que no puede haber una sustitución total o parcial del profesor y los cursos de matemáticas por herramientas digitales. Por el contrario, éstas deben utilizarse para expandir el análisis que se hace de los problemas aplicados.

Referencias

Alvis Puentes, J.F., Aldana Bermúdez, E. and Sepúlveda Delgado, O. (2022). Configuración de un ambiente de aprendizaje: una mirada desde la educación matemática crítica. *Revista Interamericana de Investigación Educación y Pedagogía RIIEP*, 15(1). https://doi.org/10.15332/25005421.6460.

Association of American Colleges and Universities (2020). *QUANTITATIVE LITERACY VALUE RUBRIC for more information, please contact value@aacu.org*. [online] pp.1–2. Available at: https://oira.unc.edu/wp-content/uploads/sites/297/2017/07/AACU_QL_ValueRubric.pdf [Accessed 19 Dec. 2024].

Bakker, A., Cai, J. and Zenger, L. (2021). Future themes of mathematics education research: an international survey before and during the pandemic. *Educational Studies in Mathematics*, 107(1), pp.1–24. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10049-w.

Bredon, G.E. (2013). *Topology and geometry*. New York: Springer-Verlag.

Cano, M.C. and Flores-Medrano, E. (2020). Prácticas matemáticas: un avance en su caracterización. In: *IV Congreso Iberoamericano sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas*. Torrossa, pp.87–94.

Chen, P. (2016). Mathematical Representation in Economics and Finance: Philosophical Preference, Mathematical Simplicity, and Empirical Relevance. In: E. Oppoliti and P. Chen, eds., *Methods and Finance*. Springer, pp.17–49.

Cincotti, G., Loi, G. and Pappalardo, M. (2001). Frequency decomposition and compounding of ultrasound medical images with wavelet packets. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 20(8), pp.764–771. https://doi.org/10.1109/42.938244.

Department of Mathematics UP (2024). *Applied Analysis | Department of Mathematics | University of Pittsburgh*. [online] Pitt.edu. Available at: https://www.mathematics.pitt.edu/research-areas/applied-analysis [Accessed 19 Dec. 2024].

Farfán Núñez, S.M., Cuéllar Pulido, G.K., Oliveros Ramos, J.H. and Giraldo Ramírez, Y.A. (2023). Significado de la derivada desde un enfoque Newtoniano: Una propuesta del seminario de profundización “Una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(2), pp.3643–3671. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i2.5603.

Fraser, C.G. (1989). The calculus as algebraic analysis: Some observations on mathematical analysis in the 18th century. *Archive for history of exact sciences*, 39(4), pp.317–335. https://doi.org/10.1007/bf00348445.

Galimullina, E., Ljubimova, E. and Ibatullin, R. (2019). SMART education technologies in mathematics teacher education - ways to integrate and progress that follows integration. *Open Learning: The Journal of Open, Distance and e-Learning*, 35(1), pp.4–23. https://doi.org/10.1080/02680513.2019.1674137.

Haleem, A., Javaid, M. and Singh, R.P. (2022). An era of ChatGPT as a significant futuristic support tool: A study on features, abilities, and challenges. *BenchCouncil Transactions on Benchmarks, Standards and Evaluations*, [online] 2(4), p.100089. https://doi.org/10.1016/j.tbench.2023.100089.

Hammerstein, S., König, C., Dreisörner, T. and Frey, A. (2021). Effects of COVID-19-Related School Closures on Student Achievement-A Systematic Review. *Frontiers in Psychology*, [online] 12(12). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2021.746289.

Illinois Tech (2023). *Applied Analysis*. [online] Iit.edu. Available at: https://www.iit.edu/applied-math/research/applied-analysis [Accessed 19 Dec. 2024].

Jakubowski, M., Gajderowicz, T. and Patrinos, H.A. (2024). *Covid-19, School Closures, and Student Learning Outcomes: New Global Evidence from PISA*. [online] Social Science Research Network. https://doi.org/10.2139/ssrn.4696073.

Jessop, S. (2017). The Historical Connection of Fourier Analysis to Music. *The Mathematics Enthusiast*, 14(1-3), pp.77–100. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1389.

Millman, R. and Grattan-Guinness, I. (1972). The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann. *The American Mathematical Monthly*, 79(3), p.315. https://doi.org/10.2307/2316649.

Milsom, J.A. (2021). The Brachistochrone: An Excellent Problem for All Levels of Physics Students. *The Physics Teacher*, 59(8), pp.606–609. https://doi.org/10.1119/5.0021274.

Moon, K. (2023). Guest Editorial: Connecting Mathematical Representations from Algebra to Calculus. *The Mathematics Enthusiast*, 21(3), pp.497–500. https://doi.org/10.54870/1551-3440.1640.

Muhazir, A. and Retnawati, H. (2020). The teachers' obstacles in implementing technology in mathematics learning classes in the digital era. *Journal of Physics: Conference Series*, 1511(1), p.012022. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1511/1/012022.

Nortvedt, G.A. and Siqveland, A. (2018). Are beginning calculus and engineering students adequately prepared for higher education? An assessment of students' basic mathematical knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 50(3), pp.325–343. https://doi.org/10.1080/0020739x.2018.1501826.

Páez, D.-A., Eudave-Muñoz, D., Cañedo-Ortiz, T. de J. and Macías-Esparza, A.C. (2020). Construcción de la técnica en praxeologías matemáticas dadas en el aula de telebachillerato. *New Trends in Qualitative Research*, 2, pp.803–810. https://doi.org/10.36367/ntqr.2.2020.803-810.

Palacios, R. and Delgado, V. (2006). Introducción a la Criptografía: tipos de algoritmos. *Anales de Mecánica y Electricidad*, 83(1), pp.42–46.

Palafox Pérez de Salazar, J.C. (2023). PISA 2022 'PISA 2000, 2018 y 2022. Origen, prepandemia y postpandemia'. *Voces de la Educación*, [online] 8(16), pp.216–267. Available at: https://www.revista.vocesdelaeducacion.com.mx/index.php/voces/article/view/720 [Accessed 17 Dec. 2024].

Pinargote-Zambrano, J.J., Lino-Calle, V.A. and Vera-Almeida, B.J. (2024). Python en la enseñanza de las Matemáticas para estudiantes de nivelación en Educación Superior. *MQRInvestigar*, 8(3), pp.3966–3989. https://doi.org/10.56048/mqr20225.8.3.2024.3966-3989.

Poveda Ramos, G. (1986). El Falso Dilema de la Matemática Pura y Aplicada. *Ciencia, Tecnología y Desarrollo*, 10(1), pp.99–111.

Riego-Gaona, M.A. and Bocanegra-Fuentes, M.P. (2024). Entre formatos, evidencias y fechas límite: Caracterización del trabajo académico en el Instituto Tecnológico de Querétaro. *Revista RedCA*, 6(18), pp.30–30. https://doi.org/10.36677/redca.v6i18.19790.

Salett Biembengut, M. and Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática*, 16(2), pp.105–125. https://doi.org/10.24844/em1602.06.

Schoenfeld, A.H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. *Journal of Education*, 196(2), pp.1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202.

Shao, Z., Wang, P., Zhu, Q., Xu, R., Song, J., Zhang, M., Li, Y.K., Wu, Y. and Guo, D. (2024). DeepSeekMath: Pushing the Limits of Mathematical Reasoning in Open Language Models. *arXiv.org*. [online] https://doi.org/10.48550/arXiv.2402.03300.

Shiguay, A., Maney, G. and De, R. (2022). El Pensamiento Matemático: los 5 pilares de la formación docente en ciencias. *Horizontes Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 6(23), pp.713–724. https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i23.371.

Simic-Muller, K. (2019). 'There Are Different Ways You Can Be Good at Math': Quantitative Literacy, Mathematical Modeling, and Reading the World. *PRIMUS*, 29(3-4), pp.259–280. https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1530705.

Simó, V.L., Lagarón, D.C. and Rodríguez, C.S. (2020). Educación STEM en y para el mundo digital: El papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. *Revista de Educación a Distancia (RED)*, [online] 20(62). https://doi.org/10.6018/red.410011.

Solar, H., Ortiz, A., Aravena, M. and Goizueta, M. (2023). Relaciones entre la argumentación y la modelación en el aula de matemáticas. *Bolema Boletim de Educação Matemática*, 37(76), pp.500–531. https://doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a07.

Swanagan, B.S. (2012). *The impact of students' understanding of derivatives on their performance while solving optimization problems*. Dissertation. pp.1–147.

Tabach, M. and Trgalová, J. (2020). Teaching Mathematics in the Digital Era: Standards and Beyond. In: Y. Ben-David Kolikant, D. Martinovic and M. Milner-Bolotin, eds., *STEM Teachers and Teaching in the Digital Era*. Springer, pp.221–241.

Tallman, M.A. and Frank, K.M. (2018). Angle measure, quantitative reasoning, and instructional coherence: an examination of the role of mathematical ways of thinking as a component of teachers' knowledge base. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23(1), pp.69–95. https://doi.org/10.1007/s10857-018-9409-3.

Technical University of Denkmark (2024). *Applied mathematical analysis - Specialization*. [online] Tecnical University of Denkmark . Available at: https://www.dtu.dk/english/education/graduate/msc-programmes/mathematical-modelling-and-computation/specialization/applied-mathematical-analysis [Accessed 19 Dec. 2024].

Torres Ramírez, C. (2024). *Las pruebas PISA: jóvenes con niveles bajos de desempeño en México*. Instituto Belisario Domínguez, pp.1–18.

University of Birmingham (2021). *Programmes and Modules - Course Details LM Applied Mathematical Analysis*. [online] Bham.ac.uk. Available at: https://program-and-modules-handbook.bham.ac.uk/webhandbooks/WebHandbooks-control-servlet?Action=getModuleDetailsList&pgSubj=06&pgCrse=33857&searchTerm=002021 [Accessed 19 Dec. 2024].

Vacher, H.L. (2014). Looking at the Multiple Meanings of Numeracy, Quantitative Literacy, and Quantitative Reasoning. *Numeracy*, 7(2). https://doi.org/10.5038/1936-4660.7.2.1.

Wanduku, D., Zheng, S., Zhou, H., Chen, Z., Sills, A. and Agyingi, E. (2024). *Applied Mathematical Analysis and Computations I*. [online] Springer. Available at: https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-69706-7 [Accessed 19 Dec. 2024].

Wardat, Y., Tashtoush, M.A., AlAli, R. and Jarrah, A.M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), pp.em2286–em2286. https://doi.org/10.29333/ejmste/13272.

Weigand, H.-G., Trgalova, J. and Tabach, M. (2024). Mathematics teaching, learning, and assessment in the digital age. *ZDM*, 56, pp.525–541. https://doi.org/10.1007/s11858-024-01612-9.

Wikipedia (2020). *Mathematical analysis*. [online] Wikipedia. Available at: https://en.wikipedia.org/wiki/Mathematical_analysis [Accessed 18 Dec. 2024].

Witten, I.H., Frank, E., Hall, M.A. and Pal, C. (2017). Extending instance-based and linear models. In: *Data Mining Practical Machine Learning Tools and Techniques*. ScienceDirect, pp.243–284. https://doi.org/10.1016/b978-0-12-804291-5.00007-6.

Yevsyeyeva, E. and Skafa, O. (2016). Game Theory in economics education. *Didactics of Mathematics*, 13(17), pp.39–52. https://doi.org/10.15611/dm.2016.13.06.