El interés simple no es tan simple
Simple interest is not so simple

*Arturo Lorenzo Valdés**

Resumen

El interés simple y la solución de problemas que lo involucran mediante ecuaciones de valor son presentados de manera incorrecta en diferentes libros de texto, ya que en éstos se afirma que dicha solución depende de la fecha focal utilizada. En este trabajo se desarrolla y ejemplifica la manera correcta de resolver problemas que involucran interés simple. Se presentan la función de acumulación y de monto bajo interés simple y compuesto. Se explica y ejemplifica el uso correcto de la función de monto de interés simple en el planteamiento y resolución de la ecuación de valor en diferentes fechas focales. Se muestra que resolver ecuaciones de valor con interés simple, debe obtenerse el mismo resultado independientemente de la fecha focal.

Palabras Clave: interés simple, ecuación de valor, fecha focal.

Abstract

Simple interest and solving problems involving it by value equations are presented incorrectly in different textbooks, since in these it is affirmed that the solution depends on the focal date used. This paper develops and illustrates the correct way to solve problems involving simple interest. The accumulation function and amount function under simple and compound interest are presented. It is explained and illustrated the proper use of the amount function under simple interest in expressing and solving the equation of value at different focal dates. It is shown that solving equations of value involving simple interest, should give the same result regardless of the focal date.

Keywords: simple interest, value equation, focal date.

1 Introducción

La teoría del interés estudia el valor del dinero en el tiempo empleando la medida de interés. La enseñanza de esta disciplina es importante por los diferentes usos basados en ella, ya sea para las

* Personal details and contact information Arturo Lorenzo Valdés
Profesor Investigador del Área de Matemáticas de la Universidad Popular Autónoma del Estado Puebla. arturo.lorenzo@upaep.mx

finanzas personales o para estudios teóricos avanzados. En este sentido, el estudio del interés se inicia con el interés simple para continuar con el interés compuesto ampliamente utilizado en todos los sectores.

En numerosos cursos y libros de texto, el interés simple ha sido tratado, en forma incorrecta, como interés compuesto al emplearse la función de acumulación que involucra interés simple de la misma manera que la función de acumulación que involucra interés compuesto. Lo anterior lleva a que si se elige una fecha focal diferente para la valuación, el resultado que se busca es diferente. Esta inquietud está presente en algunos docentes cuando trabajan con el concepto de interés, aunque son muy pocos los que comparten sus investigaciones en este tema. Uno de estos trabajos es el de Cabeza (2008). En este documento reflexiona sobre cuestionamientos de sus alumnos con respecto a por qué el valor presente de las cuotas constantes vencidas no es igual al valor presente de la anualidad vencida bajo interés simple y qué porción de cuota vencida bajo interés simple se asigna a interés y qué porción a capital.

Esta inquietud tiene que ver con un error conceptual en muchos libros de texto de "Matemáticas Financieras" utilizados en las escuelas de negocios que consiste en considerar a un monto como si fuera capital, distinción muy importante en interés simple, no así en interés compuesto donde un monto se puede tratar como capital en cualquier momento ya que los intereses se capitalizan.

El propósito de este trabajo es explicar el uso correcto del interés simple y el planteamiento de los problemas que lo involucran mediante ecuaciones de valor.

En la siguiente parte se presentan los fundamentos teóricos de la teoría del interés como son funciones de acumulación y de monto para interés simple. Y se presenta la forma errónea en que se utiliza la función de acumulación con interés simple. En la tercera parte se presenta las ecuaciones de valor, se ejemplifica la forma incorrecta y se desarrolla y ejemplifica la forma correcta del uso del interés simple para posteriormente concluir.

2 Funciones de acumulación y de monto

La teoría del interés estudia el valor del dinero en el tiempo empleando la medida de interés. Si se considera la inversión de una unidad monetaria, la función de acumulación proporciona la cantidad acumulada hasta un tiempo t y se denota $a(t)$. Es claro que la función de acumulación evaluada en cero es uno ($a(0) = 1$) y, en general, es una función no decreciente. Por su parte, la función de monto considera la inversión de un capital inicial (k) y proporciona la cantidad acumulada hasta un tiempo t. Se puede calcular a partir de la función de acumulación como $A(t) = k\, a(t)$. En los cursos formales de teoría del interés, se estudian a profundidad estas funciones y se emplean libros de texto excelentes como el de Kellison (2009) o el de Vaaler(2008).

El interés simple es cuando los intereses sólo se obtienen del capital, por lo tanto el capital no cambia y sería igual a la función de monto evaluada en el tiempo cero. En este caso la función de acumulación es $a(t) = (1 + it)$ y por lo tanto la función de monto $A(t) = k\,(1 + it)$. Para una demostración formal pueden consultarse los textos anteriores.

El interés compuesto es aquel en el que los intereses se calculan sobre la cantidad acumulada en cada momento del tiempo, es decir los intereses se calculan sobre el monto. Podría decirse que, en este caso, un monto es un capital y viceversa. En este caso la función de acumulación es $a(t) = (1+i)^t$ y por lo tanto la función de monto $A(t) = k\,(1+i)^t$.

Para conocer el valor acumulado de un punto a partir de otro, con interés simple, tenemos las siguientes opciones:

1. Restar los valores de la funciones de acumulación por lo que la cantidad acumulada en un periodo s, sería igual a la cantidad acumulada en el periodo t más (o menos) los intereses de ese periodo de tiempo:

$$\begin{gathered} A(s) = k(1+is) \\ A(t) = k(1+it) \\ A(s) - A(t) = k(1+is) - k(1+it) = ki(s-t) \\ A(s) = A(t) + ki(s-t) = A(t) + A(0)i(s-t) \end{gathered} \tag{1}$$

2. Calcular el valor presente para encontrar el capital inicial y utilizar la función de acumulación hasta el tiempo deseado:

$$\begin{gathered} A(s) = k(1+is) \\ A(t) = k(1+it) \\ A(s)/A(t) = \big(k(1+is)\big)/(k(1+it)) \\ A(s) = A(t)(1+is)/(1+it) \end{gathered} \tag{2}$$

Este último procedimiento es el que ha llevado a la confusión en el momento de resolver ejercicios que involucran interés simple. En este caso se confunde el procedimiento con interés compuesto:

$$\begin{gathered} A(s) = k(1+i)^s \\ A(t) = k(1+i)^t \\ A(s)/A(t) = (k(1+i)^s)/(k(1+i)^t) \\ A(s) = A(t)(1+i)^{s-t} \end{gathered} \tag{3}$$

La última expresión nos permite pasar del punto t al punto s directamente con la función de acumulación de interés compuesto (Fig. 1).

Fig. 1 Cantidad acumulada en el tiempo s a partir del tiempo t.

Esto no sucede con interés simple, pero en la práctica y en las clases, en lugar de utilizar la última ecuación en (2), utilizan, equivocadamente, la última ecuación en (3) ajustada para interés simple:

$$A(s) = A(t)(1 + i(s - t)) \tag{4}$$

Esta última ecuación nos lleva a un error, ya que los intereses no estarían calculados a partir del capital inicial (que no cambia), sino que estarían calculados a partir del monto en el tiempo t.

3 Ecuaciones de valor

Las ecuaciones de valor son representaciones matemáticas que involucran tasas de interés. Se presentan dos obligaciones como dos diferentes formas de pago de un bien, dos inversiones equivalentes, etc. La idea es igualar las dos obligaciones en una misma fecha que se conoce como fecha o punto focal. Cada una de las cantidades de la obligación se valúa en esa fecha utilizando la función de acumulación correspondiente.

Para el caso de interés compuesto esta operación es común, empleando la última ecuación en (3).

El problema viene cuando se presentan ecuaciones de valor con interés simple. En la práctica es común valuar las cantidades con interés simple como se valúan con interés compuesto. Lo anterior ha llevado a algunos autores a afirmar que el resultado bajo interés simple, depende del punto focal.

Como ejemplo, suponga que el día de hoy le recibe un préstamo de \$100 bajo una tasa de interés simple del 10% anual. En un año, para liquidar su deuda tendría que pagar \$110. Si quiere liquidar su deuda en el segundo año tendría que pagar \$120.

Suponga que sólo se tiene información del adeudo al final del primer año (\$110) pero se quiere liquidar al final del segundo año. El diagrama en el tiempo se presenta en Fig. 2:

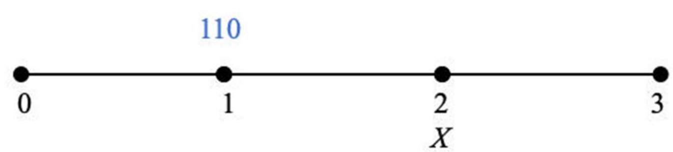

Fig. 2 Diagrama en el tiempo. Valor (X), en $t = 2$ de \$110 en $t = 1$.

Planteamos las ecuaciones de valor de acuerdo a como se enseña tradicionalmente en las escuelas, utilizando erróneamente (4), en puntos focales diferentes.

1. En el año 2

   $X = 110\,(1 + 0.1(1))$ por lo que, erróneamente, $X = 121$

2. En el año 3

$$X\big(1 + 0.1(1)\big) = 110\,\big(1 + 0.1(2)\big)$$

$$X = 110\frac{(1 + 0.1(2)}{(1 + 0.1(1))}$$

   por lo que da el resultado, $X = 120$

3. En el año 4

$$X\big(1 + 0.1(2)\big) = 110\,\big(1 + 0.1(3)\big)$$

$$X = 110\frac{(1 + 0.1(3)}{(1 + 0.1(2))}$$

   por lo que da el resultado, $X = 119.17$

4. Si seguimos así sucesivamente, la cantidad de X sigue decreciendo y si valuamos en el punto focal n se tendría:

$$X\big(1+0.1(n-1)\big) = 110\,\big(1+0.1(n)\big)$$

$$X = 110\frac{(1+0.1(n)}{(1+0.1(n-1))}$$

y al hacer tender n a infinito resulta que $X = 110$, por lo que al deudor le conviene evaluar lo más lejano posible y no pagar los intereses del segundo periodo.

La forma correcta de evaluar sería utilizar la última ecuación en (2) y que se representa en Fig. 3:

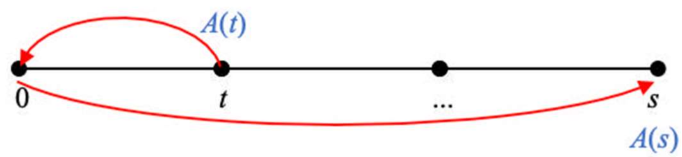

Fig. 3 Diagrama en el tiempo. Forma correcta de pasar de $A(t)$ a $A(s)$.

En este caso, calculamos el valor presente de la cantidad acumulada en el tiempo t , $A(t)$ y de la cantidad resultante se calcula el valor acumulado en el tiempo s , $A(s)$.

Del ejemplo anterior:

1. Si se quiere valuar en el año 3

$$X\frac{(1+0.1(3)}{(1+0.1(2))} = 110\frac{(1+0.1(3)}{(1+0.1(1))}$$

$$X = 110\frac{(1+0.1(3)}{(1+0.1(1))}\frac{(1+0.1(2)}{(1+0.1(3))}$$

por lo que da el resultado, $X = 120$

2. Si se quiere valuar en el año 4

$$X\frac{(1+0.1(4)}{(1+0.1(2))}=110\frac{(1+0.1(4)}{(1+0.1(1))}$$

$$X=110\frac{(1+0.1(4)}{(1+0.1(1))}\frac{(1+0.1(2)}{(1+0.1(4))}$$

por lo que da el resultado, $X = 120$

Por lo tanto, es necesario saber si las cantidades son un capital o un monto. El capital es la cantidad original y no cambia durante todo el proceso. El monto es la cantidad que se genera al sumar los intereses al capital y depende del momento en que se calcule. Por lo tanto, en el caso de interés simple, es necesario conocer el capital original y por eso se calcula el valor presente de cada cantidad para luego llevarla a la fecha deseada y el resultado debe dar el mismo independientemente de la fecha focal.

El siguiente ejemplo considera dos cantidades en una de las obligaciones. Suponga que se piden prestados \$4,000 al 18% de interés anual simple. Se debe pagar el préstamo mediante \$1,000 al final de 3 meses y dos pagos iguales al final de 6 y 9 meses.

Se pueden plantear la ecuación de valor en diferentes fechas focales:

1. Si se quiere valuar en el mes 3

$$4{,}000\left(1+0.18\left(\frac{3}{12}\right)\right)=1{,}000+X\frac{\left(1+0.18\left(\frac{3}{12}\right)\right)}{\left(1+0.18\left(\frac{6}{12}\right)\right)}+X\frac{\left(1+0.18\left(\frac{3}{12}\right)\right)}{\left(1+0.18\left(\frac{9}{12}\right)\right)}$$

2. Si se quiere valuar en el mes 9

$$4{,}000\left(1+0.18\left(\frac{9}{12}\right)\right)=1{,}000+X\frac{\left(1+0.18\left(\frac{9}{12}\right)\right)}{\left(1+0.18\left(\frac{6}{12}\right)\right)}+X\frac{\left(1+0.18\left(\frac{9}{12}\right)\right)}{\left(1+0.18\left(\frac{9}{12}\right)\right)}$$

En los dos casos el resultado es $X = \$1,692.01$

Un caso más complicado sería si se obtienen dos o más préstamos a interés simple en diferentes fechas, ya que, el préstamo en la segunda fecha no puede ser llevado a un tiempo anterior por ser un capital, y se tiene que especificar de manera clara la forma de pago. Lo anterior es equivalente a determinar la fecha de inicio de los montos. Con estos supuestos, se puede resolver el problema en cualquier fecha focal (considerando que el capital no puede trasladarse a una fecha anterior).

Suponga que se piden prestados \$3,000 hoy y a los dos años se piden prestados \$6,000. Se debe pagar el préstamo mediante pagos iguales a los cinco, seis y siete años. ¿De cuánto son esos pagos si la tasa de interés es del 10% anual simple?

El diagrama del tiempo se presenta en Fig. 4:

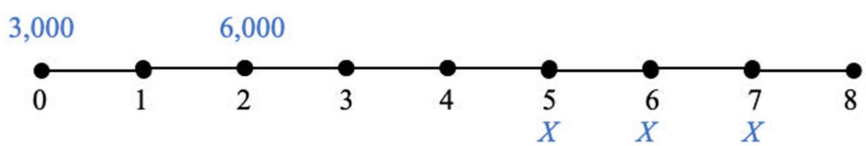

Fig. 4 Diagrama en el tiempo. Ejemplo con tres pagos.

Se deben \$9,000 de capital, y en particular en el año dos (sería el nuevo origen) se deberían \$600 de intereses.

La solución en este caso es cambiar el origen al segundo año y los intereses generados en los dos primeros años se repartirá en cantidades iguales en los años 5, 6 y 7 (esto puede hacerse ya que como es interés simple, estos intereses ya no generan otros intereses). Lo anterior se esquematiza en Fig. 5:

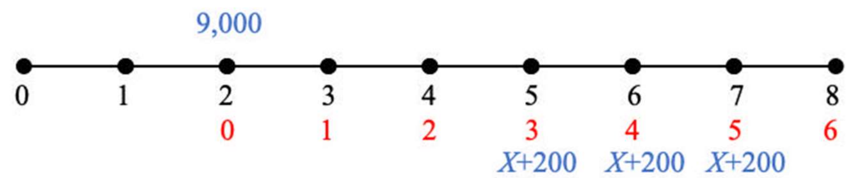

Fig. 5 Diagrama en el tiempo. Cambio de origen

1. Si se quiere valuar en el año 3 (año 1 con el cambio de origen):

$$
\begin{aligned}
9{,}000\big(1+0.1(1)\big) = \quad & (X+200)\frac{\big(1+0.1(1)\big)}{\big(1+0.1(3)\big)} + \\
& (X+200)\frac{\big(1+0.1(1)\big)}{\big(1+0.1(4)\big)} + (X+200)\frac{\big(1+0.1(1)\big)}{\big(1+0.1(5)\big)}
\end{aligned}
$$

2. Si se quiere valuar en el año 5 (año 3 con el cambio de origen)

$$
\begin{aligned}
9{,}000\big(1+0.1(3)\big) = \quad & (X+200)\frac{\big(1+0.1(3)\big)}{\big(1+0.1(3)\big)} + \\
& (X+200)\frac{\big(1+0.1(3)\big)}{\big(1+0.1(4)\big)} + (X+200)\frac{\big(1+0.1(3)\big)}{\big(1+0.1(5)\big)}
\end{aligned}
$$

En ambos casos el resultado es: X = \$3,985.69 y en los años 5, 6 y 7 se pagarían \$4,185.69 (se suman los \$200).

4 Conclusiones

En los cursos de matemáticas financieras y teoría del interés se definen los conceptos de función de acumulación y función de monto que nos indican la cantidad que se tiene en cada momento del tiempo. Esa cantidad depende de la forma en la cual se acumula el dinero. En particular, se enseñan dos formas de acumular el dinero, mediante interés simple y el ampliamente utilizado interés compuesto.

Aunque el interés simple tiene pocas aplicaciones, es importante que se entienda y se enseñe bien. El punto a considerar cuando se trabaja con interés simple es que el capital permanece constante. Al enseñar interés simple, se comete el error de calcular el monto acumulado en cada momento suponiendo directamente, la función de acumulación de interés simple como si en cada momento se tuviera un capital diferente, es decir, cambiando el capital, cuando lo correcto para moverse de un punto a otro es sumar (o restar) solo los intereses del periodo.

Este error conceptual lleva a que al resolver problemas con interés simple, se afirme, en algunos textos, que el resultado cambia si se cambia la fecha focal.

En este trabajo se concluye que lo anterior no sucede, basta con utilizar correctamente la función de acumulación con interés simple para obtenerse el mismo resultado independientemente de la fecha focal.

Referencias

CABEZA, L. (2010). "Cavilaciones sobre el interés simple," *Zona Próxima***.** (12), 158-175.

KELLISON, S. G. (2009). *The theory of interest*, Third edition., Boston:McGraw-Hill Irwin.

VAALER, L. F., AND DANIEL, J. W. (2008). *Mathematical Interest Theory*, Second edition., Washington, DC: Mathematical Association of America.

Lista de Figuras